

**LBRIS**

We know  
books

Adrian Popescu

**Memorator de matematică  
Geometrie  
pentru liceu**

 **Booklet**  
București, 2021

## Bibliografie

1. D. Brânzei, G. Constantinescu, L. Mircea, A. Popescu, B. Singer, G. Streinu Cercel, *Manual M1-2 (Cl. a IX-a și a X-a)*, Editura Sigma, 2000.
2. G. Constantinescu, B. Singer, G. Streinu-Cercel, C. Chites, I. Marinescu, Ilie Romeo, Gh. Stoianovici, *Manual M1 (Cl. a XI-a)*, Editura Sigma, 2000.
3. N. Danciu, *Geometrie analitică în plan și în spațiu*, Editura Didactică și Pedagogică, 1973.
4. Vârtogeanu, *Geometrie sintetică în plan și în spațiu*, Editura Sibila, 1994.

## Cuprins

<b>I. Geometrie și trigonometrie</b> .....	3
<b>1. Paralelism și calcul vectorial</b> .....	3
1.1. Vectori, egalitatea a doi vectori, suma a doi vectori .....	3
1.2. Produsul unui vector cu un număr real ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).....	4
1.3. Descompunerea unui vector după două direcții date .....	4
1.4. Coliniaritatea a doi vectori; probleme de coliniaritate .....	5
1.5. Reper cartezian; coordonate carteziene; distanța dintre două puncte .....	6
1.6. Coordonatele unui vector; coordonatele unei sume vectoriale; coordonatele unui produs dintre un vector și un scalar .....	8
1.7. Ecuația dreptei determinate în plan de un punct și de o direcție dată; ecuația dreptei determinată în plan de două puncte .....	11
1.8. Recunoașterea paralelismului sau a concurenței a două drepte .....	13
1.9. Translația .....	14
1.10. Omotetia .....	16

<b>2. Relații metrice în plan și în spațiu utilizând elemente de trigonometrie</b> .....	23
2.1. Rezolvarea triunghiului dreptunghic .....	23
2.2. Cercul trigonometric; sin; cos; tg și ctg.....	25
2.3. Reducerea la primul cadran; formule trigonometrice fundamentale; $\sin 2\alpha + \cos 2\beta = 1$ ; $\cos(\alpha \pm \beta)$ ; $\sin(\alpha \pm \beta)$ ; $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ .....	31
2.4. Alte formule trigonometrice.....	35
2.5. Transformarea sumelor în produs, exprimarea lui $\sin \alpha$ , $\cos \alpha$ , $\operatorname{tg} \alpha$ și $\operatorname{ctg} \alpha$ cu ajutorul lui $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .....	36
2.6. Modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi. Teorema sinusurilor, teorema cosinusurilor. Rezolvarea tiunghiului oarecare. Formule pentru aria triunghiului.....	38
2.7. Unghiuri și distanțe în plan și în spațiu.....	42
2.8. Definierea funcțiilor trigonometrice sin, cos, tg și ctg; paritate, periodicitate; reprezentarea grafică (prin puncte).....	47
2.9. Rezolvarea unor ecuații de forma $\sin x = a$ ; $\cos x = a$ ; $\operatorname{tg} x = b$ ; $\operatorname{ctg} x = b$ ; rezolvarea unor ecuații reductibile .....	54
<b>II. Elemente de geometrie în spațiu</b> .....	61
1.1. Transformări geometrice .....	61
1.2. Produsul scalar a doi vectori în plan și în spațiu; condiții de perpendicularitate .....	67
1.3. Poziții relative în spațiul tridimensional.....	70

1.4. Determinarea distanțelor, ariilor sau volumelor folosind calculul sintetic sau vectorial. Principiul lui Cavalieri.....	80
1.5. Tipuri de probleme, secțiuni în corpuri geometrice, corpuri înscrise, corpuri circumscrie .....	90
<b>III. Elemente de geometrie analitică</b> .....	92
1.1. Reper cartezian în plan și în spațiu .....	92
1.2. Locuri geometrice date prin condiții liniare .....	94
1.3. Aplicații ale determinanților în geometrie.....	95
1.4. Locuri geometrice remarcabile .....	98
Bibliografie .....	108

Pentru comenzi:  
tel: 021 430.3095  
e-mail: comenzi@booklet.ro  
web: www.booklet.ro

## Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

POPESCU, ADRIAN

Memorator de matematică : geometria / Adrian Popescu. -

București : Booklet, 2015

ISBN 978-606-590-303-6

514(075.35)

## I. Geometrie și trigonometrie (clasa a IX-a)

### 1. Paralelism și calcul vectorial

#### 1.1. Vectori, egalitatea a doi vectori, suma a doi vectori

**Definiție:** O mulțime ordonată  $\vec{V} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  se numește **vector cu 3 componente**, sau **vector 3 - dimensional**. Numărul natural  $n$  se numește **dimensiunea vectorului  $\vec{V}$** ,  $\mathbb{R}^3$  se numește **spațiu real (3 - dimensional)**.

**Observație:**  $\vec{V} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  - vector cu 2 componente,  $\mathbb{R}^2$  este planul real.

**Definiție:** Vectorii  $\vec{V}_1 = (x_1, x_2, x_3)$  și  $\vec{V}_2 = (y_1, y_2, y_3)$  sunt egali dacă  $x_i = y_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

**Definiție:** Suma vectorilor  $\vec{V}_1$  și  $\vec{V}_2$  de mai sus este vectorul  $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ .

## 1.2. Produsul unui vector cu un număr real ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )

**Definiție:** Fie un vector  $\vec{V} = (x_1, x_2, x_3)$  și scalarul  $\lambda \in \mathbb{R}$ , produsul dintre vector și scalarul  $\lambda$  este vectorul  $\lambda \vec{V} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ .

**Observație:** Diferența vectorilor

$$\vec{V}_1 = (x_1, x_2, x_3) \text{ și}$$

$$\vec{V}_2 = (y_1, y_2, y_3) \text{ este vectorul}$$

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3).$$

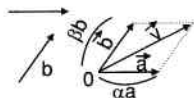
**Exemplu:**  $\vec{V}_1 = (2, 3, -2)$  și  $\vec{V}_2 = (1, 5, 3)$

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (3, 8, 1); \quad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (1, -2, -5);$$

$$3\vec{V}_1 = (6, 9, -6); \quad \vec{V}_2 - \vec{V}_1 = (-1, 2, 5).$$

## 1.3. Descompunerea unui vector după două direcții date

**Teoremă:** Fie  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  doi vectori oarecare, neavând aceeași direcție (dreptele suport nu sunt paralele). Oricare ar fi vectorul  $\vec{V}$ , există  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $\vec{V} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ . Scalarii  $\alpha$  și  $\beta$  cu această proprietate sunt unici.



## 1.4. Coliniaritatea a doi vectori; probleme de coliniaritate

**Definiție:** Doi vectori sunt **coliniari** dacă cel puțin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli și au aceeași direcție.

**Observație:** 1. Vectorul nul este colinar cu orice alt vector.  
2. Doi vectori necoliniari sunt doi vectori nenuli care au direcții diferite.

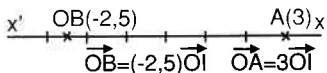
**Teoremă:** Fie  $\vec{u}$  un vector nenul și  $\vec{V}$  un vector oarecare.

1. Dacă  $\vec{u}$  și  $\vec{V}$  sunt coliniari, atunci există un număr real  $\lambda$ , unic, astfel încât  $\vec{V} = \lambda \vec{u}$ .
2. Dacă există  $\lambda \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\vec{V} = \lambda \vec{u}$ , atunci  $\vec{u}$  și  $\vec{V}$  sunt coliniari.

**Important:** Coliniaritatea vectorilor poate fi utilizată pentru a demonstra că trei puncte sunt coliniare sau că două drepte sunt paralele.

## 1.5. Reper cartezian; coordonate carteziene; distanța dintre două puncte

**Definiție:** Se numește **axă de coordonate** o dreaptă pe care sunt fixate: un punct  $O$  (numit **origine**), un segment  $OI$ , a cărui lungime este egală cu unitatea și un sens pozitiv.

**Exemplu:** 

**Definiție:** Se numește **reper cartezian** în plan un sistem format din două axe  $Ox$  și  $Oy$  cu aceeași origine. Un reper cartezian format cu axele  $Ox$  și  $Oy$  se notează  $xOy$ . Dacă axele  $Ox$  și  $Oy$  sunt perpendiculare, reperul  $xOy$  se numește **reper ortogonal** (sistem de axe ortogonale).

**Teoremă:** Într-un reper cartezian, oricărui punct  $A(a,b)$  din plan îi corespunde un singur vector  $\vec{V} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$  și reciproc.

**Definiție:** Se numește **reper cartezian** în spațiu un sistem format din trei axe  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  cu aceeași origine și el se notează  $xOyz$ . Dacă axele  $Ox$ ,  $Oy$  și  $Oz$  sunt perpendiculare două câte două, atunci avem un **reper ortogonal** sau un **sistem de axe ortogonale** ale spațiului.

**Teoremă:** Într-un reper cartezian, oricărui punct  $A(a,b,c)$  îi corespunde un singur vector  $\vec{V} = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  și reciproc, pentru orice vector  $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$  există unic un punct  $A(a,b,c)$ .  $a, b, c$  sunt coordonatele punctului  $A$  sau (componentele) coordonatele vectorului  $\vec{V}$ .

**Definiție:** Un reper cartezian în plan determină o împărțire a planului în patru regiuni, numite **cadrane**, marcate cu cifrele romane I, II, III, IV și definite după cum urmează:

I = {  $M(x,y) \mid x > 0, y > 0$  };  
 II = {  $M(x,y) \mid x < 0, y > 0$  };  
 III = {  $M(x,y) \mid x < 0, y < 0$  };  
 IV = {  $M(x,y) \mid x > 0, y < 0$  }.

**Teoremă:** Dacă  $A(x_1, y_1)$  și  $B(x_2, y_2)$  sunt două puncte din plan, atunci distanța dintre ele este:

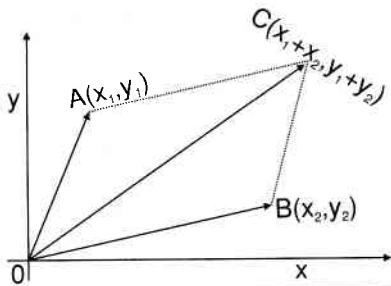
$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

**Teoremă:** Dacă  $A(x_1, y_1, z_1)$  și  $B(x_2, y_2, z_2)$  sunt două puncte din spațiu, atunci distanța dintre ele este:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

### 1.6. Coordonatele unui vector; coordonatele unei sume vectoriale; coordonatele unui produs dintre un vector și un scalar

**Teoremă:** **Suma vectorilor.** Fie cu reperul  $xOy$  vectorii  $\overline{OA} = (x_1, y_1)$  și  $\overline{OB} = (x_2, y_2)$  atunci suma lor este vectorul  $\overline{OC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . Segmentul  $OC$  este diagonala paralelogramului de laturi  $OA$  și  $OB$ . Se mai numește regula paralelogramului.



**Teoremă:** **Diferența vectorilor.** Fie vectorii  $\overline{OA} = (x_1, y_1)$  și  $\overline{OB} = (x_2, y_2)$ . Diferența  $\overline{OA} - \overline{OB}$  este vectorul  $\overline{OA} + \overline{OB'}$  unde  $\overline{OB'} = (-x_2, -y_2)$  și este simetricul lui  $B$  față de  $O$  (originea segmentului).

**Teoremă:** **Produsul unui vector cu un scalar.** Fie vectorul  $\overline{OA} = (x_1, y_1)$  și scalarul  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Produsul dintre vectorul  $\overline{OA}$  și scalarul  $\lambda$  este vectorul  $\overline{OP} = \lambda \overline{OA}$ ,  $\overline{OP} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$ .

Analog pentru vectorii din spațiu.

**Adunarea vectorilor în spațiu:**  $\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$  și  $\overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$  atunci suma lor este vectorul  $\overline{OC} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ .

**Diferența vectorilor în spațiu:**  $\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$  și  $\overline{OB} = (x_2, y_2, z_2)$  atunci diferența lor este vectorul  $\overline{OD} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$  ( $\overline{OD} = \overline{OA} - \overline{OB}$ ).

**Produsul dintre un vector din spațiu și un scalar**  
 $\overline{OA} = (x_1, y_1, z_1)$  și  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $\overline{OE} = \lambda \overline{OA} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ .

**Teoremă:** **Proprietățile sumei vectorilor.** Fie  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trei vectori oarecare în  $\mathbb{R}^2$  (respectiv  $\mathbb{R}^3$ ). Avem:

1. **Asociativitatea adunării vectoriale:**  
 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ .
2. **Comutativitatea adunării vectoriale:**  
 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .
3.  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$  ( $\vec{0}$  este vectorul nul).
4.  $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$  ( $-\vec{u}$  este simetricul lui  $\vec{u}$  față de adunarea vectorilor).

**Teoremă:** *Proprietățile înmulțirii unui vector cu un scalar.*

- $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$ ,  $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)\vec{u}, \vec{v}$  doi vectori în  $\mathbb{R}^2$  (respectiv  $\mathbb{R}^3$ ).
- $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$ ,  $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)\vec{u}$  vector în  $\mathbb{R}^2$  (respectiv  $\mathbb{R}^3$ ).
- $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u}$ ,  $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)\vec{u}$  vector în  $\mathbb{R}^2$  (respectiv  $\mathbb{R}^3$ ).
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ ,  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$ ,  $(\forall)\vec{u}$  vector în  $\mathbb{R}^2$  (respectiv  $\mathbb{R}^3$ ).

- Observații:**
- Dacă  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , atunci  $\frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$  este vector unitar (are lungimea 1).
  - $(\lambda - \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} - \mu\vec{u}$ ,  $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)\vec{u}$  vector.
  - $\lambda(\vec{u} - \vec{v}) = \lambda\vec{u} - \lambda\vec{v}$ ,  $(\forall)\lambda \in \mathbb{R}$  și  $(\forall)\vec{u}$  și  $\vec{v}$  vectori.
  - $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  și  $\vec{u}$  vector  $\Leftrightarrow \lambda = 0$  sau  $\vec{u} = \vec{0}$ .

**1.7. Ecuația dreptei determinate în plan de un punct și de o direcție dată; ecuația dreptei determinate în plan de două puncte**

Vectorii  $\vec{u} = (x_1, y_1)$  și  $\vec{v} = (x_2, y_2)$  sunt coliniari  $\Leftrightarrow$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k, \quad x_2, y_2 \neq 0 \text{ (sau } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0).$$

**Teoremă:** *Ecuația dreptei d determinată de punctul  $A(x_0, y_0)$  și de vectorul director  $\vec{u} = (\alpha, \beta)$  este:*

$$y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0).$$

**Observație:** Dreapta d este paralelă cu suportul vectorului  $\vec{u}$ .

**Teoremă:** *Fie  $A(x_1, y_1)$  și  $B(x_2, y_2)$  două puncte în plan, dreapta AB are ecuația*

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

**Observație:** Panta dreptei AB este  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  și este egală cu tangenta unghiului format de dreapta AB cu sensul pozitiv al axei Ox.