Adrian Popescu

Memorator de matematică
Geometrie
pentru liceu

Booklet
Bucureşti, 2021

Bibliografie

1. D. Brânzei, G. Constantinescu, L. Mircea, A. Popescu, B. Singer, G. Streinu Cercel, *Manual M1-2 (Cl. a IX-a şi a X-a)*, Editura Sigma, 2000.
2. G. Constantinescu, B. Singer, G. Streinu-Cercel, C. Chites, I. Marinescu, Ilie Romeo, Gh. Stoianovici, *Manual M1 (Cl. a XI-a)*, Editura Sigma, 2000.
3. N. Danciu, *Geometrie analitică în plan şi în spaţiu*, Editura Didactică şi Pedagocică, 1973.
4. Vârtogeanu, *Geometrie sintetică în plan şi în spaţiu*, Editura Sibila, 1994.

Cuprins

Editura Booklet
www.booklet.ro

Pentru comenzi:
tel: 021 430.3095
e-mail: comenzi@booklet.ro
web: www.booklet.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
POPESCU, ADRIAN
Memorator de matematică : geometria / Adrian Popescu. - Bucureşti : Booklet, 2015
ISBN 978-606-590-303-6

514(075.35)

CNI CORESI
Tipărit la C.N.I. „CORESI" S.A.

I. Geometrie şi trigonometrie (clasa a IX-a)

1. Paralelism şi calcul vectorial

1.1. Vectori, egalitatea a doi vectori, suma a doi vectori

Definiţie: *O mulţime ordonată* $\vec{V}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ *se numeşte* ***vector cu 3 componente****, sau* ***vector 3 - dimensional****. Numărul natural* n *se numeşte* ***dimensiunea vectorului*** $\vec{V}$, $\mathbb{R}^3$ *se numeşte* ***spaţiu real (3 - dimensional)****.*

Observaţie: $\vec{V}=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ - vector cu 2 componente, $\mathbb{R}^2$ este planul real.

Definiţie: *Vectorii* $\vec{V_1}=(x_1,x_2,x_3)$ *şi* $\vec{V_2}=(y_1,y_2,y_3)$ *sunt egali dacă* $x_i = y_i$ (i = 1, 2, 3).

Definție: *Suma vectorilor* $\vec{V_1}$ *şi* $\vec{V_2}$ *de mai sus este vectorul* $\vec{V_1}+\vec{V_2}=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$.

1.2. Produsul unui vector cu un număr real ($\lambda \in \mathbb{R}$)

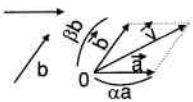
Definiţie: *Fie un vector $\vec{V} = (x_1, x_2, x_3)$ şi scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$, produsul dintre vector şi scalarul λ este vectorul $\lambda\vec{V} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$.*

Observaţie: Diferenţa vectorilor
$\vec{V_1} = (x_1, x_2, x_3)$ şi
$\vec{V_2} = (y_1, y_2, y_3)$ este vectorul
$\vec{V_1} - \vec{V_2} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3)$.

Exemplu: $\vec{V_1} = (2,3,-2)$ şi $\vec{V_2} = (1,5,3)$
$\vec{V_1} + \vec{V_2} = (3,8,1)$; $\vec{V_1} - \vec{V_2} = (1,-2,-5)$;
$3\vec{V_1} = (6,9,-6)$; $\vec{V_2} - \vec{V_1} = (-1,2,5)$.

1.3. Descompunerea unui vector după două direcţii date

Teoremă: *Fie $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ doi vectori oarecare, neavând aceeaşi direcţie (dreptele suport nu sunt paralele). Oricare ar fi vectorul $\vec{V}$, există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, astfel încât $\vec{V} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Scalarii α şi β cu această proprietate sunt unici.*



1.4. Coliniaritatea a doi vectori; probleme de coliniaritate

Definiţie: *Doi vectori sunt **coliniari** dacă cel puţin unul este nul sau dacă amândoi sunt nenuli şi au aceeaşi direcţie.*

Observaţie: 1. Vectorul nul este coliniar cu orice alt vector.
2. Doi vectori necoliniari sunt doi vectori nenuli care au direcţii diferite.

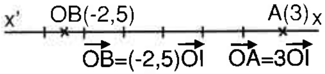
Teoremă: *Fie $\vec{u}$ un vector nenul şi $\vec{V}$ un vector oarecare.*
1. Dacă $\vec{u}$ şi $\vec{V}$ sunt coliniari, atunci există un umăr real λ, unic, astfel încât $\vec{V} = \lambda\vec{u}$.
2. Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{V} = \lambda\vec{u}$, atunci $\vec{u}$ şi $\vec{V}$ sunt coliniari.

Important: *Coliniaritatea vectorilor poate fi utilizată pentru a demonstra că trei puncte sunt coliniare sau că două drepte sunt paralele.*

1.5. Reper cartezian; coordonate carteziene; distanţa dintre două puncte

Definiţie: *Se numeşte* ***axă de coordonate*** *o dreaptă pe care sunt fixate: un punct O (numit* ***origine****), un segment OI, a cărui lungime este egală cu unitatea şi un sens pozitiv.*

Exemplu:



Definiţie: *Se numeşte* ***reper cartezian*** *în plan un sistem format din două axe* Ox *şi* Oy *cu aceeaşi origine. Un reper cartezian format cu axele* Ox *şi* Oy *se notează* xOy. *Dacă axele* Ox *şi* Oy *sunt perpendiculare, reperul* xOy *se numeşte* ***reper ortogonal*** *(****sistem de axe ortogonale****).*

Teoremă: *Într-un reper cartezian, oricărui punct* A(a,b) *din plan îi corespunde un singur vector* $\overrightarrow{V}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ *şi reciproc.*

Definiţie: *Se numeşte* ***reper cartezian*** *în spaţiu un sistem format din trei axe* Ox, Oy, Oz *cu aceeaşi origine şi el se notează* xOyz. *Dacă axele* Ox, Oy *şi* Oz *sunt perpendiculare două câte două, atunci avem un* ***reper ortogonal*** *sau un* ***sistem de axe ortogonale*** *ale spaţiului.*

Teoremă: *Într-un reper cartezian, oricărui punct* A(a,b,c) *îi corespunde un singur vector* $\overrightarrow{V}=(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *şi reciproc, pentru orice vector* $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ *există unic un punct* A(a,b,c). a,b,c *sunt coordonatele punctului* A *sau (componentele) coordonatele vectorului* $\overrightarrow{V}$.

Definiţie: *Un reper cartezian în plan determină o împărţire a planului în patru regiuni, numite* ***cadrane****, marcate cu cifrele romane I, II, III, IV şi definite după cum urmează:*

$I=\{M(x,y) \mid x>0, y>0\}$;

$II=\{M(x,y) \mid x<0, y>0\}$;

$III=\{M(x,y) \mid x<0, y<0\}$;

$IV=\{M(x,y) \mid x>0, y<0\}$.

Teoremă: *Dacă* $A(x_1,y_1)$ *şi* $B(x_2,y_2)$ *sunt două puncte din plan, atunci distanţa dintre ele este:*

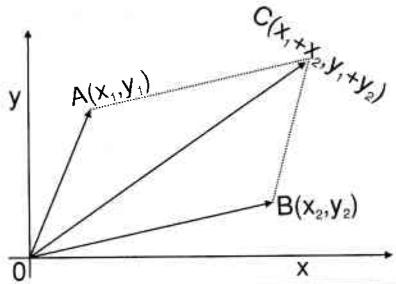
$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Teoremă: *Dacă* $A(x_1,y_1,z_1)$ *şi* $B(x_2,y_2,z_2)$ *sunt două puncte din spaţiu, atunci distanţa dintre ele este:*

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

1.6. Coordonatele unui vector; coordonatele unei sume vectoriale; coordonatele unui produs dintre un vector şi un scalar

Teoremă: ***Suma vectorilor.*** *Fie cu reperul* xOy *vectorii* $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ *şi* $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$ *atunci suma lor este vectorul* $\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$. *Segmentul* OC *este diagonala paralelogramului de laturi* OA *şi* OB. *Se mai numeşte regula paralelogramului.*



Teoremă: ***Diferenţa vectorilor.*** *Fie vectorii* $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ *şi* $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$. *Diferenţa* $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ *este vectorul* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$ *unde* $\overrightarrow{OB'}=(-x_2,-y_2)$ *şi este simetricul lui* B *faţă de* O *(originea segmentului).*

Teoremă: ***Produsul unui vector cu un scalar.*** *Fie vectorul* $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$ *şi scalarul* $\lambda\in\mathbb{R}$. *Produsul dintre vectorul* $\overrightarrow{OA}$ *şi scalarul* λ *este vectorul* $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}=(\lambda x_1,\lambda x_2)$. .

Analog pentru vectorii din spaţiu.

Adunarea vectorilor în spaţiu: $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ şi $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$ atunci suma lor este vectorul $\overrightarrow{OC}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$.

Diferenţa vectorilor în spaţiu: $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ şi $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$ atunci diferenţa lor este vectorul $\overrightarrow{OD}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$ $(\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$.

Produsul dintre un vector din spaţiu şi un scalar $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$ şi $\lambda\in\mathbb{R}$; $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$.

Teoremă: ***Proprietăţile sumei vectorilor.*** Fie $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ *trei vectori oarecare în* $\mathbb{R}^2$ *(respectiv* $\mathbb{R}^3$*). Avem:*

1. *Asociativitatea adunării vectoriale:* $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$.
2. *Comutativitatea adunării vectoriale:* $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
3. $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ ($\vec{0}$ *este vectorul nul).*
4. $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$ ($-\vec{u}$ *este simetricul lui* $\vec{u}$ *faţă de adunarea vectorilor).*

Teoremă: ***Proprietăţile înmulţirii unui vector cu un scalar.***

1. $\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$, $(\forall)\lambda\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{u},\vec{v}$ doi vectori în $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$).
2. $(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$, $(\forall)\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{u}$ vector în $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$).
3. $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$, $(\forall)\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{u}$ vector în $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$).
4. $1\cdot\vec{u}=\vec{u}$, $0\cdot\vec{u}=\vec{0}$, $(\forall)\ \vec{u}$ vector în $\mathbb{R}^2$ (respectiv $\mathbb{R}^3$).

Observaţii:

1. Dacă $\vec{u}\neq\vec{0}$, atunci $\frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}$ este vector unitar (are lungimea 1).
2. $(\lambda-\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}-\mu\vec{u}$, $(\forall)\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{u}$ vector.
3. $\lambda(\vec{u}-\vec{v})=\lambda\vec{u}-\lambda\vec{v}$, $(\forall)\lambda\in\mathbb{R}$ şi $(\forall)\ \vec{u}$ şi $\vec{v}$ vectori.
4. $\lambda\vec{u}=\vec{0}$, $\lambda\in\mathbb{R}$ şi $\vec{u}$ vector $\Leftrightarrow$ $\lambda=0$ sau $\vec{u}=\vec{0}$.

1.7. Ecuaţia dreptei determinate în plan de un punct şi de o direcţie dată; ecuaţia dreptei determinate în plan de două puncte

Vectorii $\vec{u}=(x_1,y_1)$ şi $\vec{v}=(x_2,y_2)$ sunt coliniari $\Leftrightarrow$

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=k$, x_2, $y_2\neq 0$ (sau $x_1y_2-x_2y_1=0$).

Teoremă: *Ecuaţia dreptei d determinată de punctul $A(x_0,y_0)$ şi de vectorul director $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ este:*

$$y-y_0=\frac{\beta}{\alpha}(x-x_0).$$

Observaţie: Dreapta d este paralelă cu suportul vectorului $\vec{u}$.

Teoremă: *Fie $A(x_1,\ y_1)$ şi $B(x_2,\ y_2)$ două puncte în plan, dreapta AB are ecuaţia*

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Observaţie: Panta dreptei AB este $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ şi este egală cu tangenta unghiului format de dreapta AB cu sensul pozitiv al axei Ox.